

Гегель и математика

Э. Кольман и С. Яновская

Огромный интерес, проявляемый естествознанием Советского союза к изучению Гегеля, обоснован наиболее полно в следующих словах из философского наследия Ленина: «... Современные естествоиспытатели найдут (если сумеют искать и если мы научимся помогать им) в материалистически истолкованной диалектике Гегеля ряд ответов на те философские вопросы, которые ставятся революцией в естествознании и на которых «сбиваются» в реакцию интеллигентские поклонники буржуазной моды. Без того, чтобы такую задачу себе поставить и систематически ее выполнять, материализм не может быть воинствующим материализмом... Без этого крупные естествоиспытатели так же часто, как до сих пор, будут беспомощны в своих философских выводах и обобщениях. Ибо естествознание прогрессирует так быстро, переживает период такой глубокой революционной ломки во всех областях, что без философских выводов естествознанию не обойтись ни в коем случае»¹.

Естествознание и математика Советского союза непрерывно работают над тем, чтобы на основе изучения материалистической диалектики укреплять и расширять свой философский фундамент для дальнейшей наступательной борьбы против натиска буржуазных идей и против всяческих попыток реставрировать буржуазное мировоззрение.

В вопросе о математике для нас тут важны наряду с различными местами из произведений и переписки Маркса и Энгельса, особенно наряду с «Анти-Дюрингом» и «Диалектикой природы» и с философскими сочинениями Ленина, еще не опубликованные пока математические рукописи Маркса, имеющиеся в фотокопиях в Институте Маркса—Энгельса—Ленина в количестве 863 убористо исписанных страниц. Часть этого материала, преимущественно относящаяся к сущности дифференцирования и к теореме Тейлора, уже расшифрована.

Как расценивает материалистическая диалектика роль гегелевской философии математики? Марксизм-ленинизм исходит из того положения, что «мистификация, которую претерпела диалектика в руках Гегеля, отнюдь не помешала тому, что именно Гегель первый дал исчерпывающую и сознательную картину ее общих форм движения. У Гегеля диалектика стоит на голове. Надо ее поставить на ноги, чтобы вскрыть рациональное ядро под мистической оболочкой»². Поэтому ясно само собой, что и к гегелевской философии математики марксизм подходит с точки зрения критики, различающей, умеющей отделить положительное ядро материального и его верного воспроизведения от отрицательной оболочки мистически искаженного, идеального. Мы видим таким образом в гегелевской философии математики переплетение положительных и отрицательных сторон. Задачей марксистов-ленинцев является высвобождение ее рационального ядра из идеалистической скорлупы.

Как оценивали работу Гегеля в области математики сами основоположники марксизма, видно из следующих слов Энгельса: «Не могу пройти мимо одного замечания о старике Гегеле, которому вы отказываете в более глубоком математически-естественнонаучном образовании. Гегель знал математику настолько, что ни один из его учеников не был в состоянии издать многочисленные математические рукописи, оставшиеся после него. Единственный из известных мне людей, достаточно знающий математику и философию, чтобы суметь это сделать, это — Маркс»³.

¹ Ленин, О значении воинствующего материализма, 1922 г.

² Маркс, Предисловие ко второму изданию «Капитала», 1873 г.

³ Письмо Энгельса к Ф. А. Ланге от 29 марта 1865 г.

Заслугу гегелевской философии в области математики мы, диалектические материалисты, усматриваем в том, что:

1) Гегель первый гениально отгадал развитие категорий качества и количества и их единство—меру;

2) он подошел к правильному определению предмета математики, а поэтому и к ее роли в общей системе наук, дал определение математики, взрывающее рамки обыденного буржуазного мировоззрения с его характерным фетишизмом количества (Кант и панматематизм).

3) он понял, что область дифференциального и интегрального исчисления — уже не чисто количественная область, что в ней уже содержатся качественные моменты и черты, характерные для конкретного понятия (единство внутренне-противоречивых моментов) и

4) что поэтому всякая попытка свести анализ к элементарной математике, уничтожить качественный скачок между обеими этими областями должна считаться с самого начала обреченной на неудачу;

5) Гегель понял, что своими собственными средствами, без обращения к теоретическому философскому мышлению, математика не в состоянии обосновать методы, употребляемые ею же самой;

6) он признал, что возникновение дифференциального исчисления было обусловлено не внутренними потребностями саморазвивающейся математики, но что его источник и фундамент находятся вне её, в области практики, что

7) метод дифференциального исчисления представляет аналогию с известными процессами природы и что поэтому он не может быть понят из самого себя, а только из характера той области, в которой этот метод находит свое применение;

8) он правильно почувствовал в строго алгебраическом лагранжевом обосновании дифференциального исчисления, покоящемся на понятии первоначальной и производной функций, наивысшую исторически достигнутую ступень «философии» математики бесконечного. Путаница во взгляде Гегеля на математику, с принудительной необходимостью вытекающая из его идеалистической системы, заключается с нашей точки зрения в том, что:

1) метод дифференциального исчисления он считает методом, вообще чуждым 'математике, так что внутри ее не может быть найден переход (диалектический) между элементарной математикой и анализом, а потому понятия и методы последнего могут быть вверены в математику лишь внешним и произвольным образом, посредством внешней рефлексии, но не могут возникнуть путем диалектического развития как единство тождества и различия нового и старого;

2) такой переход, поскольку он по мнению Гегеля, вообще говоря, мыслим только вне математики, в рамках его философской системы (т. е. лишь как переход от категории «определенного количества» к категории «качественно-количественного» отношения), при чем однако в общем и целом он вынужден перенести в свою философию истинную диалектику развития самой математики;

3) часто он делает это в искажающей и мистифицирующей форме, заменяет бывшие тогда еще не известными действительные отношения идеальными, фантастическими отношениями, давая таким образом мнимое решение там, где нужно было бы отчетливо формулировать нерешенную проблему, и стараясь обосновать и защитить в современной ему математике то, что иногда было даже просто неверно;

4) рассматривая фактическое развитие математики, как отблеск саморазвития логических категорий, искаженных вмешательством чуждых им «применений», Гегель отрицает возможность построения такой математики, которая была бы способна, сознательно применяя диалектический метод, вскрыть истинную диалектику развития своих собственных понятий и методов, а «е просто только воспринять в себя посредством внешней рефлексии качественные и противоречащие друг другу моменты;

5) поэтому Гегель не только не в состоянии поставить задачу реконструкции математики с помощью метода диалектической логики, но и вынужден плестись в хвосте современной ему математики, несмотря на его правильную критику ее основных понятий и методов;

6) поэтому же он отдает предпочтение лагранжеву обоснованию анализа не за то, что оно вскрывает реальные отношения между математикой конечного (алгеброй) и бесконечного (анализом), а за то, что Лагранж вводит в математику понятие производной чисто внешним и произвольным способом при чем Гегель присоединяется здесь к обычному плоскому толкованию Лагранжа);

7) отрицая возможность диалектической математики в своем стремлении чрезмерно, больше чем следует, принизить значение математики, он доходит до того, что совершенно отрицает качественные (диалектические) моменты в элементарной математике (арифметике). Между тем наличие их настолько очевидно для такого диалектика, как Гегель, что, изгнав их в одном месте (в главе о «количестве»), он сам же вынужден восстановить их в другом (в главе о «мере»).

То, что Гегель правильно определил предмет математики, приходится ценить особенно высоко ввиду того, что этот вопрос и сейчас еще создает величайшие затруднения для самых различных идеалистических и эклектических философских направлений, которые, воспроизводя материальную действительность в искаженном виде, не могут найти правильного ответа на него.

Так, интуиционисты (Вейль, Броувер), идя по стопам Канта, считают предметом математики чистое созерцание а priori, тогда как логисты, причисляющие, следуя еще Лейбницу, математику к логике, усматривают в математических аксиомах и теоремах законы разума. Формалисты, как Гильберт, отрицают вообще существование особого предмета математики, считая ее простым собранием правил, позволяющих нам производить различные комбинации и преобразования; механистические эмпирики, включающие математику в физику и отрицающие ее специфический характер, считают ее предметом физическое пространство и физическое время; другие, как Мах, ищут ее предмет в психологии и т. д.

Подобные определения приводят однако к таким трудностям, которых не могла преодолеть ни одна из этих философских систем. Для того, чтобы примирить созерцание а priori с не-эвклидовой геометрией, неокантианцам (Бибербах, Нельсон) пришлось, как известно, проделать немало «комических вывертов, жалких фокусов и уловок». Логисты (Рессель, Фреге) были вынуждены стать на ту точку зрения, что математика есть грамматика без подлежащего, дополнения, глагола и сказуемого, грамматика союзов, как «и», «или», «если» и т. д., и превратить ее таким образом в колоссальную тавтологию, неспособную дать какое бы то ни было новое знание о предмете. Механистические эмпирики не были в состоянии включить в свою систему многомерные геометрии и оказались перед необходимостью признать лишь одну из многих математических геометрий, а остальные изгнать из математики. Формалисты, превратившие математику в своего рода шахматную игру пустыми символами, не в состоянии объяснить ее роль в технике, в естественных науках и в статистике. Конвенционалисты (Пуанкаре), считающие математические понятия и операции просто удобными соглашениями, ради «экономии мышления», уклоняются от всякого ответа на поставленный вопрос и ничего не могут сказать о развитии этих понятий.

Таким образом все эти философские школы, из которых каждая схватывает и «возводит в абсолют, оторванный от материи, от природы, обожествленный»⁴ одну какую-нибудь, но только одну сторону действительности, не в состоянии понять связь математики с практикой и законы ее развития. А Гегель дал такое определение математики, которое выразило сущность предмета, — определение, являющееся, собственно говоря, независимо от замысла самого Гегеля, глубоко материалистическим, если отбросить его идеалистическую исходную позицию.

⁴ Ленин, К вопросу о диалектике, 1915—1916 гг.

Математика есть, по Гегелю, наука о количестве (Quantitas), т. е. о такой определенности предметов, которая характеризует их не как таковые, в их специфическом отличии от других предметов и от них же самих на другой стадии их развития, а изучает их только с их внешней, безразличной к изменениям, стороны. «Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, то-есть весьма реальное содержание. Тот факт, что это содержание проявляется о крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Чтобы изучить эти формы и отношения в их чистом виде, следует их оторвать совершенно от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела»⁵. Эту связь между математикой и материальной действительностью и выражает материалистически истолкованное гегелевское определение предмета математики. Пространственные отношения нашего физического пространства соответствуют требованиям этого определения, и пространственные формы действительно составляют, по Гегелю, предмет математики, хотя и не исчерпывают его, ибо всякое отношение, имеющее существенно различные по качеству аналогии в природе, может стать предметом математики. Так например вихри, исследуемые векторным анализом, могут быть также вихрями какой-нибудь жидкости или же относиться к электродинамике, — откуда однако не следует, что эти математические вихри суть продукт идеи, ибо они лишь отображают количественные соотношения реальной, т. е. материальной действительности.

Определение Гегеля схватывает таким образом подлинную сущность математики, дает возможность понять ее связь с материальной действительностью и в то же время устанавливает границы математики, ее место и роль в системе наук. С точки зрения этого определения все вышеприведенные определения могут быть не только а limine опровергнуты, но и действительно преодолены. В каждом из них могут быть усмотрены моменты истины, «та из черточек, сторон, граней познания», которая, если ее односторонне преувеличить и раздуть, превращается «в оторванный от материи, от природы, обожествленный» абсолют.

Все это становится возможным, несмотря на то, что сам Гегель не сумел до конца преодолеть односторонность этих определений. Ибо у него встречаются, часто в довольно эклектическом смешении, и такие мотивы, которые просто совпадают как с лейбницевой логикой, так и с кантовской конструкцией математики из элементов априорного созерцания и даже с конвенционалистским и формалистическим отрицанием объективной истинности математических суждений. Так например правильно характеризуя абстрактную, формальную сущность математического метода, согласно которому «сперва устанавливаются определения и аксиомы, а за ними следуют теоремы, доказательство которых состоит лишь в рассудочном приведении к недоказанным исходным предпосылкам»⁶, — Гегель в то же время сам односторонне преувеличивает момент тавтологичности в математике и закрывает глаза на эволюцию этого метода, приводящую к тому, что произвольный и внешний характер аксиом снимается (хотя большинство математиков и философов математики до сих пор этого не заметили) и что в развитии математики формально-логические рассудочные моменты вытесняются диалектическими моментами.

Гегель правильно отмечает наличие чувственных моментов в математике, но он слишком полагается на Канта, сводя иногда вслед за ним все содержание математики к абстрактному чувственному созерцанию. Он согласен например с Кантом, что математика «имеет дело не с понятиями, а с абстрактными определениями чувственных созерцаний», при чем специально «геометрия имеет дело с чувственным или абстрактным созерцанием «пространства»⁷. Это верно, поскольку именно в геометрии чувственный момент особенно резко выражен, но в такой абсолютной форме этого нельзя утверждать даже и по отношению

⁵ Энгельс, Анти-Дюринг, 1878 г.

⁶ Гегель, Система философии.

⁷ Там же.

к геометрии. Впрочем Гегель сам признает в дальнейшем, что даже эта наука, изучающая только абстрактные определения чувственных восприятий, «наталкивается в конце концов в своем ходе, — и это весьма замечательно, — на несоизмеримые и иррациональные величины, где она и вынуждается, если хочет двигаться дальше в процессе определения, выйти за пределы рассудочного принципа»⁸. Наконец Гегель остроумно и справедливо критикует «фокусничество» и шарлатанство даже ньютоновских доказательств, пытавшихся представить опытные законы в виде результатов вычисления, он совершенно прав в своем утверждении, что «отнюдь не каждый член математической формулы, взятый сам по себе, должен иметь предметное значение и что математическая правильность результата еще не гарантирует реальный, т. е. соответствующий какой-нибудь действительности, смысл итогов вычисления». Однако это утверждение сводится у Гегеля одновременно и к тому, что он вообще отрицает истинность математических суждений самих по себе, что он рассматривает математику, подобно нынешним формалистам, только со стороны ее внутренней последовательности, а не объективной истинности, т. е. смотрит иногда на нее только как на вычисление, а не как на науку, обладающую своим собственным предметом исследования.

Поскольку математика есть наука об абстрактных количественных определениях, она в состоянии отобразить только одну сторону действительности; между нею и физикой уже есть существенное различие, узел, переход к новому качеству. Ибо физика исследует материю уже с качественной, существенной ее стороны: ее молекулы, атомы и электроны — уже не безразличные отношения, в которые могут взаимно вступать, не меняя своего качества, различные вещи, а именно молекулы, атомы и электроны во всем богатстве своих частных определений, своего специфического возникновения и развития. Поэтому физика не может быть сведена к математике; роль математики в науке ограничена. Эта точка зрения диаметрально противоположна кантовской, ибо ведь, по Канту, всякая наука имеет право называться наукой лишь постольку, поскольку в ней находит себе место математика.

Своим выступлением против фетишизации количества — фетишизации, которая есть только отражение абстрактных денежно-торговых отношений буржуазного строя, — Гегель в сущности прорвал в этом пункте рамки буржуазной философии; но так как он был и остался философом буржуазии, то он и мог развить эту, по существу глубоко материалистическую, точку зрения только в идеалистической форме и поэтому в необузданно гипертрофированном виде. Материалистическая суть этой гегелевской точки зрения особенно ясно обнаруживается, если принять во внимание, что именно пресловутая «математизация» физики оказала величайшие услуги философскому и естественно-научному идеализму. Не напрасно писал презирующий материализм натурфилософ Рей: «Кризис физики состоит в завоевании физики духом математики» — кризис, при котором «материя исчезает, остаются только уравнения»⁹.

Тем не менее то, что произошло в естествознании, — сближение обеих наук — физики и математики, — расценивается Лениным, как крупный успех естественных наук. И вот тут-то видно отличие борьбы материалиста-диалектика против фетишизации математики от борьбы с нею диалектика-идеалиста. Гегель хотя и был диалектиком, не признавал однако развития понятий в математике, ибо он не относил математику к философии, т. е. к науке, имеющей дело с «понятием». «Но можно было бы далее концепировать идею философской математики, т. е. такой, которая познавала бы из понятий то, что обыкновенная рассудочная математика выводит из своих предпосылаемых определений чисто рассудочным методом без понятия. Так как, однако, математика есть наука конечных количественных определений, которые фиксируются и признаются в своей конечности и не должны переходить в другое, то она есть по существу рассудочная наука; и так как она способна быть таковой в совершенстве, то ее преимущество перед другими науками этого рода должно быть, наоборот, сохранено, и она должна остаться чистой от всякой примеси как инородного ей

⁸ Там же.

⁹ А. Рей, Теория физики у современных физиков, 1908 г.

понятия, так и эмпирических целей»¹⁰. Это не значит впрочем, что Гегель совершенно просмотрел дальнейшее развитие математики — нет, он только перенес его из самой математики в свою систему философии, и тут он требовал полного единства развития.

Между геометрией и механикой должно существовать единство, все должно быть связано цепью диалектической дедукции, цепью развития, отражающей реальные связи и развитие в природе. Единство физики и математики есть единство развития, а не сведения, единство тождества и различия, ибо обе эти науки отображают — как мы утверждаем — реальную, т. е. материальную действительность на различных ступенях ее сложности и развития. Геометрия физического пространства и механика — две области, непосредственно стоящие друг над другом: между гравитационным принципом и учением о свойствах материального времени — пространства должна следовательно существовать связь, но в то же время и различие. Чтобы вскрыть эту связь, мы должны развивать геометрию дальше в сторону все лучшего отражения свойств реального физического пространства.

Эйнштейн не мог бы развить свою теорию относительности, если бы до того не произошло именно такого развития геометрии. Дифференциальная геометрия Римана «снимает» — употребляя это выражение в смысле Гегеля — эвклидовскую геометрию, оставляя за последней лишь значение момента, подчиняя и включая геометрию «твердого» неизменного пространства постоянной кривизны в геометрию изменчивого, «текучего» пространства, остающегося эвклидовским только в своих бесконечных малых частях. В этом пространстве «либо лежащая в его основе действительность образует дискретное многообразие, либо основу мероотношений (Massbestimmungen) следует искать вовне, в действующих на него связующих силах»¹¹, так что в нем тела уже не «безразличны» к своим взаимным «расстояниям», ибо длина отрезка зависит от пройденного пути, от «истории». Не физика упраздняется, сводясь к математике, а математика развивается и поднимается ближе к физике. Это развитие происходит следовательно целиком в духе материалистически истолкованного диалектического метода Гегеля, хотя оно в то же время целиком противоречит его системе, которая ведь не допускает никакой диалектики в лишенной понятий «математике».

Итак, успехи физической теории относительности так же несовместимы с идеалистической системой Гегеля, как и с релятивистической философией, и могли быть одержаны только благодаря стихийной диалектике естествоиспытателей, невольно воспроизводящей подлинную диалектику природы. Что же касается тех неудач, которые именно сейчас терпит теория относительности Эйнштейна в своих попытках построить адекватную действительности картину мира, удовлетворяющую квантовым отношениям, — то эти неудачи коренятся в ее неспособности понять действительность как единство непрерывного и дискретного, в упорном стремлении представить ее как абсолютный континуум идеального мышления.

Поскольку Гегель изымает диалектику из природы и из естествознания и переносит ее в свою, поставленную над природой философскую систему, постольку он поступает как настоящий идеалист. И именно поэтому он не только отрицал за математикой способность стать сознательно диалектической, но и сбился, несмотря на весь свой объективизм, на чисто субъективную установку в математике. «Можно сначала считать произволом или простой возможностью составление уравнения между степенями переменных величин и отношением их функции разложения»¹² лишь дальнейшая цель, польза, применение может оправдать такое преобразование, только его полезностью, оно и было вызвано»¹³, — пишет он в тоне, который затем встречается у Маха и Пуанкаре и который характерен для махистского отношения к практике, как к чему-то внешнему по отношению к теории. А так как математическое бесконечное, выступающее в математике в форме ряда, предельного

¹⁰ Энциклопедия (гейдельбергская).

¹¹ Риман, «О гипотезах, лежащих в основе геометрии», 1854 г.

¹² Речь идет о разложении функций в строки Тэйлора и Маклорена.

¹³ Гегель, Логика.

перехода, флюксии, производной, бесконечно-малого и т. д., с точки зрения Гегеля не есть уже нечто только количественное, но содержит в себе и качественный момент, и, следовательно, математика уже не может обойтись здесь без «понятия», а между тем понятие есть нечто чуждое математике, противоречащее всем ее законам, — то, значит, она может только заимствовать его «произвольно» «лемматическим образом» из некоторой чуждой ей области. Гегель правильно констатирует, что элементарная математика никогда не породила бы из самой себя математический анализ, что на этот путь ее толкнули потребности «приложения», т. е. практики, техники, естествознания. Если Гегель пишет: «Видимость случайности, являемая дифференциальным исчислением в его приложениях, значительно уменьшилась бы, если бы отдавали себе отчет в характере тех областей, в которых приложение может иметь место, и в своеобразных потребностях и условиях этого приложения»¹⁴, — то материалистическое ядро этой мысли вполне соответствует следующему утверждению Энгельса о материальных аналогах математического бесконечного: «Но как только математика удаляется в свою неприступную крепость абстракции, в так называемую чистую математику, так сейчас же забываются все эти аналогии, бесконечное становится чем-то совершенно мистериозным, и способ, каким с ним оперируют в анализе, кажется чем-то прямо непостижимым, противоречащим всякому опыту и всякому рассудку». Однако благодаря своим идеалистическим шорам Гегель не замечает, как под этим влиянием изменяются все математические операции и понятия и все здание математики вынуждено перестроиться, хотя он и не замечает неудачу всех попыток ассимилировать новые понятия с помощью старых представлений. Впрочем как буржуазный философ, стремящийся только к объяснению мира, а не к его изменению, он вовсе и не ставит себе задачей диалектическое преобразование математики. До конца прошлого столетия естествоиспытатели кое-как уживались со старой метафизикой. Тем не менее, уже высшая математика, рассматривающая вечную истину низшей математики, как превзойденную точку зрения, внесла путаницу, — утверждает Энгельс, пока еще в полном согласии с Гегелем. Но затем начинается расхождение, ибо Энгельс продолжает: «Здесь неизменные категории исчезли, математика вступила на такую почву, где даже столь простые понятия, как «абстрактное количество, «дурная бесконечность» приняли совершенно диалектический вид и заставили математику против ее воли и без ее ведома стать диалектической»¹⁵.

По Гегелю, все эти диалектические моменты, чуждые элементарной математике постоянных величин, вообще не могут быть освоены математикой. Тщетны все попытки ассимилировать их, ибо так как математика не есть наука о «понятии», то на ее собственной почве невозможно конечно и никакое диалектическое развитие, никакое движение ее операций и понятий, и для нее остается только один путь: произвольно «принять какое-нибудь соглашение», напр. вместе с Лагранжем назвать «производной от первоначальной функции» коэффициент определенного члена в разложении этой функции в ряд Тейлора, — при чем в лучшем случае можно показать чисто внешние, т. е. несущественные для теории, удобство и целесообразность именно этого, а не какого-нибудь другого произвольного «соглашения».

Великий диалектик справедливо отвергает все современные ему попытки обоснования анализа, но он не делает при этом казалось бы естественного вывода о неудаче этих попыток вследствие того, что они ставили себе целью не развить анализ диалектически, а свести его с помощью формальной логики к элементарной математике. Вместо этого он заключает, что такое развитие в области математики вообще невозможно и может быть осуществлено¹⁶ только внутри философии, в его системе развивающихся друг из друга

¹⁴ Там же.

¹⁵ Энгельс, Диалектика природы.

¹⁶ Поскольку вообще должно быть осуществлено. Ибо Гегель считал, что то, что извне, из практики например привнесено в науку, не должно стать органической частью теории, а так и остаться внешним для нее моментом,

категорий. Изымая таким образом диалектическое развитие из математики и перенося его в свою систему чистых категорий логики, Гегель часто подвергает его при этом самой туманной, софистической и фантастической мистификации, — примером чему могут служить рассуждения о том, как интенсивное количество, объединившись со своей противоположностью, с экстенсивным количеством, переходит в бесконечный процесс, и т. д. Искусственные, мистические и мистифицирующие переходы Гегеля подтверждают и здесь, что идеалистическая диалектика, стремящаяся развить понятия из самой себя, а не отображающая реальные отношения и переходы, движение и развитие материальной действительности, становится бесплодной благодаря своему идеализму, что никакой другой научной диалектики, кроме материалистической, нет и не может быть.

Но уничтожив внутреннюю диалектику понятий в математике, Гегель лишил себя тем самым возможности революционизировать математику хотя бы в рамках своей собственной философской системы и оказался вынужденным лишь пассивно переносить и «обосновывать», вместо того чтобы активно воздействовать и изменять. В лучшем случае он может только предложить замену одного названия другим — напр. термин «функция разложения» вместо «производной»¹⁷. Если Гегель утверждает, что в рамках своей системы логических категорий он не только доказал возможность, но и дал истинное обоснование того самого математического бесконечного во всех его разновидностях, о котором до него разбивались все попытки обоснования анализа, — то все же он сам находится при этом во власти тех же представлений, против которых он так резко полемизирует. Так напр., он отвергает как ненаучный и антиматематический метод пренебрежения бесконечно малыми высшего порядка на основании их количественной незначительности, но тут же объявляет его допустимым в виду качественного характера этих величин. Так как дифференциал есть количественно-качественное отношение, то в разложении

формула

форма суммы является чем-то внешним и несущественным, от чего нужно отвлечься. «Так как мы имеем здесь дело не с суммой, а с отношением, то дифференциал вполне определен первым членом», — пишет он, отделяясь таким образом от вопроса с помощью таких же уверток, за которые вполне справедливо упрекает творцов исчисления бесконечно малых. Фактически он идет при этом по их стопам, всячески стараясь впустить в окно то, что он сам же выгнал в дверь. Так как, исходя из своей идеалистической точки зрения, Гегель не поставил и не мог поставить себе задачей реконструкцию математики средствами диалектической логики, а хотел только «обосновать» ее такую, как она есть, в рамках своей философской системы, — то именно поэтому он не справился, несмотря на ряд чрезвычайно ценных замечаний и догадок, даже и с этой задачей и не оказал непосредственно почти никакого влияния на дальнейшее развитие математики, хотя это развитие, как мы уже показали, стихийно шло диалектическими путями.

Конечно в этом нельзя винить одного только Гегеля. Еще большую вину за то, что диалектика Гегеля не оказала никакого влияния на развитие естественных наук и математики, несет ограниченность буржуазных ученых, трактовавших его, как «дохлую собаку», так что в результате из творений Гегеля сохранилось и продолжало жить только то, что Маркс и Энгельс как идеологи пролетариата, извлекли из его теорий и, перевернув с головы на ноги, поставили на службу пролетарской революции.

Материалистическое преодоление идеалистической диалектики позволило Марксу, Энгельсу, Ленину высказать в противоположность Гегелю ряд подлинно научных, т. е.

чтобы «внешнее и случайное не било расстроено в своей специфичности идеями, а самые идеи не были искажены и формализованы несоответствием материала».

¹⁷ Что впрочем весьма важно для Гегеля и характерно для его точки зрения. Ибо функция «производная» от данной есть функция, произведенная, выведенная, развившаяся из нее, а диалектического характера этого развития Гегель, для которого вся операция разложения функции в ряд носит чисто внешний, произвольный характер, не хочет видеть. Тем более, что у самого Лагранжа (как и вообще при получении производной через разложение ф-ий в строки) это развитие замаскировано неправильной исходной установкой.

адекватных материальной действительности, практике, теоретических суждений и в области математики — суждений, которые служат нам путеводными вехами для исследования, для научного предсказания и творчества. Узловыми точками являются здесь марксистско-ленинские взгляды на происхождение и движущие силы развития математики, на ее сущность и на связь и значение ее частей, на диалектические моменты в самой математике, на роль, которую она должна играть по отношению к другим наукам.

В чистой математике, — говорил Энгельс, — рассудок отнюдь не имеет дела только со своими собственными творениями и фантазиями. «Понятия числа и фигуры заимствованы именно из действительного мира... Для счета необходимы не только объекты счета, но также уже и способность при рассмотрении этих объектов отвлекаться от всех свойств, кроме их числа, а эта способность — продукт долгого исторического эмпирического развития. Понятие фигуры, как и понятие числа, заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло вовсе в голове из чистого мышления. Раньше, чем люди могли прийти к понятию фигуры, должны были существовать вещи, которые имели форму, и форму которых сравнивали... Как и прочие науки, математика возникла из потребности человека: из измерения земли и вместимости сосудов, из исчисления времени и механики. Но, как и во всех областях мышления, отвлеченные из действительного мира законы на известной ступени развития отрываются от действительного мира, противопоставляются ему, как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, по которым должен направляться мир. Так было с обществом и государством; так, а не иначе, применяется впоследствии чистая математика к миру, хотя она и заимствована из этого мира и представляет только часть его составных форм, и собственно только поэтому она вообще применима к нему»¹⁸.

И далее: «Тайна, окружающая еще и в наше время применяемые в исчислении бесконечно малых величины, дифференциалы и бесконечные разных порядков, является лучшим доказательством того, что и поныне еще воображают, будто здесь имеют дело с чистыми, свободными творениями и созданиями человеческого духа, для которых нет ничего соответственного в объективном мире. Между тем справедливо как раз обратное. Мы встречаем для всех этих мнимых величин прообразы в природе»¹⁹. При этом взгляд этот не имеет, разумеется, ничего общего со взглядом эмпириков вроде Дж. Ст. Милля, ибо он не ограничивает подобно им все познание одной индукцией, но в противоположность этим осмеянным Энгельсом «пан-индукционистам» рассматривает логическое как переработанное историческое.

Таким образом математические понятия и закономерности рассматриваются не как абсолютно неизменные, вечные истины, а как исторические связанные с судьбой человеческого общества части его идеологической надстройки, и отсюда прямо вытекает, что основной закон общественного развития, закон классовой борьбы, не может остаться без влияния на математику. «Известное изречение гласит, что если бы геометрические аксиомы задевали интересы людей, то они наверно опровергались бы. Естественно-исторические теории, задевавшие старые предрассудки теологии, вызвали и вызывают до сих пор самую бешеную борьбу»²⁰. Эта точка зрения, не имеющая ничего общего с мнением Каутского и Кунова, будто математика и естествознание должны быть целиком отнесены к производительным силам, что равносильно отрицанию в них классовой борьбы, отвергает таким образом разделение наук на точные — математика, естественные науки — и неточные — общественные науки.

Классовая точка зрения в математике не означает однако, что вся прежняя математика должна быть отброшена и заменена другой, построенной на совершенно новых принципах из совсем новых элементов. Мы стоим на той точке зрения, что развитие математики определяется развивающимися производительными силами (при чем сама математика воздействует обратно на развитие производительных сил) и что поэтому она отражает

¹⁸ Энгельс, Анти-Дюринг, 1878 г.

¹⁹ Энгельс, Примечания к Анти-Дюрингу, 1878 г.

²⁰ Ленин, Марксизм и ревизионизм, 1908 г.

материальную действительность. Но производительные силы воздействуют на математику большей частью косвенно, через промежуточное звено производственных отношений, которые в классовом обществе являются классовыми и налагают на математику свою классовую печать. «Философский идеализм есть только чепуха с точки зрения материализма грубого, простого, метафизического. Наоборот с точки зрения диалектического материализма философский идеализм есть одностороннее, преувеличенное, *überschwengliches* (Dietzgen) развитие (раздувание, распухание) одной из черточек, сторон, граней познания в абсолюте, оторванный от матери, от природы, обожествленный... Познание человека не есть (resp. не идет по) прямая линия, а кривая линия, бесконечно приближающаяся к ряду кругов, к спирали. Любой отрывок, обломок, кусочек этой кривой линии может быть превращен (односторонне превращен) в самостоятельную, целую, прямую линию, которая (если за деревьями не видеть леса) ведет тогда в болото, в поповщину (где ее закрепляет классовый интерес господствующего класса)... А у поповщины (= философского идеализма) конечно есть гносеологические корни, она не беспочвенна, она есть пустоцвет, бесспорно, но пустоцвет, растущий на живом дереве живого, плодотворного, истинного, могучего, всемогущего, объективного, абсолютного человеческого познания»²¹. Стало быть буржуазную математику тем более нельзя просто отбросить, а необходимо реконструировать, ибо она изображает действительность, — хоть и односторонне и в искаженном виде.

Но если математика обязана своим возникновением практике, если она отображает реальные отношения и связи, заимствованные из материальной действительности (хотя отображает их в совершенно абстрактной, а в буржуазном обществе и искаженной форме), — то в таком случае она должна быть диалектической. Ибо так называемая объективная «диалектика царит во всей природе»²², и «диалектика в нашей голове есть только отображение действительного развития, которое происходит в мире природы и человеческого общества и которое подчиняется диалектическим формам»²³. «У самого Гегеля это мистично, потому что категория у него предшествует, и диалектика реального мира оказывается ее простым отблеском»²⁴. И действительно, Энгельс, как уже было сказано, считал математический анализ диалектическим, так как в него вместе с введенной Декартом переменной величиной вошло движение, а следовательно и диалектика. Гегель правильно заметил, что при этом в математику проникли новые качественные и диалектические (внутренне противоречивые) моменты, но он прошел мимо того, что подчеркивает Энгельс, именно, что в результате сама математика оказалась вынужденной, хотя и бессознательно и против воли, стать диалектической и что поэтому диалектику развития ее основных понятий и методов следует искать в ней самой, следует внедрять в нее самое. Однако и элементарная математика совершенно так же, как формальная логика, не чепуха, она отражает нечто действительное и должна, стало быть, содержать в себе некоторые элементы диалектики. И в противоположность Гегелю Энгельс в самом деле их видит: «Число есть чистейшее известное нам количественное определение. Но оно полно качественных различий... 16 не есть просто сумма 16-ти единиц, оно также квадрат 4-х и биквадрат двух... Поэтому то, что говорил Гегель о бессмысленности арифметики неверно...»²⁵. Энгельс видит уже в элементарной алгебре и арифметике «превращение из одной формы в другую, противоположную», при чем это превращение «вовсе не праздная игра», а «один из самых могучих рычагов математического знания, без которого в настоящее время нельзя произвести ни одного сколько-нибудь сложного вычисления»²⁶.

²¹ Ленин, К вопросу о диалектике, 1915—1916 г.

²² Энгельс, Диалектика природы.

²³ Энгельс, Письмо Конраду Шмидту, 1 ноября 1891 г.

²⁴ Энгельс, Диалектика природы.

²⁵ Там же.

²⁶ Энгельс, Диалектика природы.

Маркс не только видел, в согласии с Гегелем, полную несостоятельность всех усилий дать формально-логическое обоснование анализа, а также и ребяческую наивность попыток обосновать его на чувственном созерцании, на графических методах и т. д., он не только отстаивал диалектику в математике, и особенно в анализе, но более того — он сделал самостоятельную попытку построения диалектического фундамента математики, опирающегося на единство исторического и логического момента. При этом Маркс не ставит себе задачей, — мы об этом уже вскользь упомянули выше, — свести анализ к арифметике, как это впоследствии пытались сделать, начиная с Вейерштрасса, математики, стоящие на точке зрения теоретико-множественного обоснования анализа, которые пришли, несмотря на все их заслуги в смысле более углубленной постановки математических проблем, к известным парадоксам теории множеств, разрушившим все построенное ими с этой целью не только математическое, но и логическое здание. Маркс хочет показать, как из самой элементарной математики, на ее собственной почве вырастает существенно новое дифференциальное и интегральное исчисление, которое является²⁷ «своеобразным способом исчисления, уже самостоятельно оперирующим на своей собственной почве», так что «алгебраический метод сам собой переходит в противоположный ему дифференциальный метод».

Так же, как и Гегель, Маркс высоко ценит работы Лагранжа по обоснованию дифференциального исчисления. Однако его понимание Лагранжа глубоко отличается от гегелевского. Гегель, как мы видели, понимает Лагранжа согласно обычному упрощенному толкованию, для которого Лагранж — типичный формалист и конвенционалист, вводящий в математику основные понятия анализа чисто внешним и произвольным образом. Маркс же ценит в нем как раз обратное, именно то, что Лагранж вскрывает связь анализа с алгеброй, что он показывает, как анализ вырастает из алгебры. «Действительные и потому простейшие связи нового со старым, — пишет Маркс, — открываются всегда к тому времени, когда новое само уже приняло внутренне закругленную форму, и можно сказать, что дифференциальное исчисление приобрело такой вид благодаря теориям Тейлора и Маклорена. Поэтому лишь Лагранжу выпало на долю свести дифференциальное исчисление к чисто алгебраической основе». Однако Маркс упрекает в то же время Лагранжа за то, что он просмотрел диалектический характер этого развития и задержался слишком долго на почве алгебры, умалив значение собственных закономерностей, собственных методов анализа: «в этом отношении им следует пользоваться только как исходным пунктом». Таким образом Маркс как подлинный диалектик борется и здесь на два фронта: как против чисто аналитического сведения нового к старому, столь характерного для механистической методологии XVIII века, так и против чисто синтетического введения нового извне, которое характерно не только для гегелевской точки зрения на математику, но и для современного интуиционизма, признающего принцип математической индукции за то новое, что приводит извне, и уничтожающего таким образом переход между логикой и математикой. Если для Гегеля однако это новое, которое лишь чужаком могло входить в математическую теорию, было все же заимствовано из внешнего мира, из практики, то для современного математического идеализма его источником снова является лишь кантовское наглядное созерцание — пресловутая интуиция. Буржуазная наука в эпоху империализма идет в своих методологических установках не вперед от Гегеля к Марксу, Энгельсу, Ленину, а назад.

Из материалистически-диалектического взгляда на математику как на хоть и крайне абстрактное, но все же отображение законов движения материальной действительности следует, что диалектический материализм должен оценивать роль математики гораздо выше, чем Гегель. Энгельс специально подчеркивает, что для «диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой»²⁸, при чем он не упускает из виду трудности ее применения в разных отраслях знания и особенно

²⁷ Здесь и в дальнейшем мы цитируем по упомянутым в начале этой статьи математическим рукописям Маркса. — Э. К. и С. Я.

²⁸ Энгельс, Диалектика в современном естествознании, 1885 г.

отмечает, что «лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изобразить математически процессы, а не только состояния»²⁹. Возрастающие трудности, создаваемые для математики сложными формами движения и накапливающиеся скачками при переходе от механики к физике, от физики к химии, от химии к биологии и далее к общественным наукам, не отрезают однако с точки зрения диалектического материализма, всякий путь к использованию математики в этих более сложных областях и оставляют даже надежду, что можно будет «математически определить основные законы капиталистических экономических кризисов»³⁰.

Из того, что диалектический материализм рассматривает диалектику понятий лишь как сознательный рефлекс диалектического движения действительного мира, что для него эта связь, определение идеального материальным, теории практикой, есть высшая руководящая инстанция, следует, что его точка зрения на дальнейшее развитие науки вообще, значит в том числе и математики, диаметрально противоположна гегелевской точке зрения. В то время, как Гегель пытается только обосновать наличное математическое знание, задача диалектического материализма — в преобразовании, в сознательном изменении, в реконструкции науки на основе руководящей роли практики. Эта основная установка, которая резко отличает марксизм-ленинизм как от философии Гегеля, так и от всех других идеалистических и эклектических направлений, дает нам возможность видеть новые пути развития отдельных наук, предохранить науку от застоя и упадка.

Современная наука, естествознание, математика капиталистических стран охвачены, подобно всей экономической и социально-политической системе капитализма, тягчайшим кризисом, небывалым по своей глубине и размерам. Этот кризис науки, который сам по себе служит лучшим аргументом против широко распространенного, хотя и совершенно несостоятельного взгляда, будто естествознание не зависит ни от философии, ни от политики, поражает прежде всего философские основы буржуазной науки. Бездна и паника, овладевшая умами господствующего класса в общественной области, отражаются в науке в виде бегства большинства ученых в объятия мистики, между тем как «небольшая часть... буржуазных идеологов, поднявшихся до теоретического понимания всего исторического движения..., примыкает к революционному классу»³¹, стремится усвоить и провести в науке его мировоззрение и методологию, т. е. материалистическую диалектику, и испытывает естественную тягу к науке победоносного революционного пролетариата. Развивающаяся математика не укладывается в рамки идеалистической философии, посягающей на самое содержание науки, требующей отсекновения ряда ее достижений (напр. требование Кронера отказаться от иррациональных чисел, Вейля — от доказательств существования и т. д.). Больше того. Современный всеобщий кризис капитализма отнимает у математики материальные средства и рабочие силы, обостряет ее отрыв от практики, ее стихийность и бесплановость, создавая все большую опасность, что самое орудие научной теории притупится и утратит способность решать проблемы практической жизни.

Так напр. Бутру³² исследует пути, которыми современный математик приходит к выбору своих тем, и его безотрадный вывод гласит, что подавляющее большинство новейших математических работ состоит из исправлений, расширений и воспроизведений более старых работ других математиков. Вызывавший уже недовольство Лейбница метод математического исследования, приводящий к чрезмерному обилию статей и к «*dégoûter de la science*» («отвращение к науке»), продолжает господствовать до сих пор и во все более сильной степени. Бутру находит однако, что никаких других путей математикам указать нельзя и что им остается только полагаться и впредь на «*Tendance generale de la science de leur temps*» («общие тенденции современной науки»). Причина этого печального положения в принципиальном отрыве теории от практики, свойственном идеалистическому мышлению,

²⁹ Энгельс, Заметки 1881—1882 г.

³⁰ Маркс, Письмо Энгельсу, 31 мая 1873 г.

³¹ Маркс и Энгельс. Коммунистический манифест.

³² Boutroux, L'idéal scientifique des mathématiciens, 1920.

в том клейме бесплановости, которым запечатлено все капиталистическое общество в целом. Только философия, ставящая себе целью адекватно отобразить материальную действительность, может явиться для науки надежным маяком, предохраняющим ее от мертвящего отрыва от практики, отрыва от «вечно зеленого дерева жизни». Только плановый принцип, проведение которого несовместимо с частной собственностью на орудия производства, с диктатурой меньшинства над большинством, может спасти науку от вырождения в пустую абстракцию и, развязав дремлющие в народных массах силы научных дарований, привести ее к новому, небывалому расцвету.

Наука Советского союза, и в том числе советская математика, сильна именно тем, что материалистическая диалектика Маркса—Ленина служит ей путеводной нитью, что социалистические принципы планирования, в свою очередь претворяющие в жизнь учения диалектического материализма, дают ей директивы, что новые, все возрастающие в своей численности кадры пролетарского студенчества, выделяющие из себя свежие научные силы, являются ее носителями. Выполнение пятилетнего плана, электрификация Советской страны, проведение новых железных дорог, создание гигантских металлургических заводов, угольных копей и т. д., индустриализация коллективизированного сельского хозяйства, строительство социалистических городов, политехнизация школы и ликвидация технической безграмотности — все это ставит перед математикой множество задач, которые могут быть успешно разрешены и могут оказать плодотворное действие на дальнейшее развитие математической теории при условии плановости в работе, при коллективном участии всех ее отраслей в общем труде, под руководством единственно научной методологии материалистической диалектики.